

RESISTÊNCIA AO COLAPSO DE MEMBROS TUBULARES NÃO REFORÇADOS

B. Ferreira*, J. Gordo*, C. Guedes Soares*,

*Unidade de Engenharia e Tecnologia Naval, Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco País, 1049-001, Lisboa
e-mail: bferreira@mar.ist.utl.pt, jgordo@mar.ist.utl.pt, guedess@mar.ist.utl.pt,
web <http://www.mar.ist.utl.pt>

Palavras-chave: Instabilidade elástica; tubos não reforçados; tensão crítica elástica

Resumo. *Apresenta-se um estudo de tubos não reforçados sujeitos a compressão axial, no qual se procedeu à verificação da tensão crítica elástica e os respectivos modos de colapso associados. Deste modo, iniciou-se por uma revisão da teoria de cilindros curtos não reforçados sujeitos a compressão axial. Através da teoria de cilindros não reforçados sujeitos a compressão axial determina-se a tensão crítica elástica e os respectivos modos de colapso associados. Utilizando a teoria de elementos finitos determina-se a tensão crítica elástica e modos de colapso associados dos respectivos modelos em estudo. Por fim procedeu-se a um estudo comparativo dos resultados obtidos pelas duas análises utilizadas.*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste na verificação, através da Teoria de Elementos Finitos, da tensão crítica elástica e também no estudo do comportamento e colapso de encanamentos curtos.

Como nota inicial é preciso lembrar que a teoria de cilindros de parede fina sujeitos a compressão axial [1,2,3] e a respectiva análise do seu colapso são assuntos extremamente complexos de tratar analiticamente, devido essencialmente à enorme influência das imperfeições locais do material. Daí poderão decorrer algumas discrepâncias nas análises teórica e por elementos finitos.

2. TEORIA DE CILINDROS NÃO REFORÇADOS SUJEITOS A COMPRESSÃO AXIAL

Se estabelecermos uma comparação entre placas de espessura reduzida, colunas e cilindros de espessura reduzida quando sujeitos a compressão pode-se dizer que as placas têm um aumento de resistência posterior ao primeiro modo de instabilidade, as colunas não possuem aumento de resistência após o primeiro modo de colapso, e os cilindros ao atingirem o primeiro modo de colapso têm uma diminuição acentuada de resistência, passando para modos de colapso de energia inferior.

Esta diminuição de resistência à compressão após o primeiro modo de colapso observada em cilindros é uma característica de quase todas as cascas, mas mais patente em cilindros de espessura reduzida não reforçados, os quais são muito sensíveis a deformações locais do material.

Um cilindro perfeito de espessura reduzida, ou seja, negligenciando as deformações do material, pode apresentar dois modos principais de instabilidade. Estes dois modos estão dependentes do seu comprimento (L), do seu raio (R) e também da sua espessura (t). Estes dois modos principais de instabilidade diferenciam-se através das distorções nas secções dos cilindros, como se pode observar na seguinte figura:

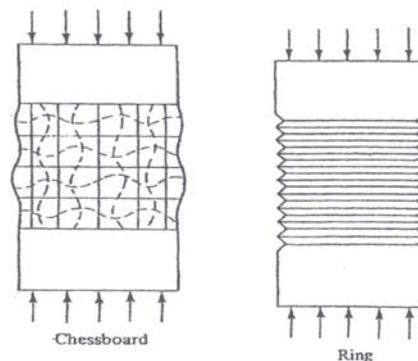


Fig. 1 Modos de instabilidade.

Desta forma tem-se dois modos principais de instabilidade: *concertina*, *xadrez*. Os modos principais de instabilidade *xadrez* e *concertina* estão intimamente ligados à geometria dos

cilindros. O modo de instabilidade *diamante* representa a transição do modo de instabilidade *xadrez* para um modo de instabilidade de energia inferior.

O comportamento dos cilindros de espessura reduzida em instabilidade são bastante complexos, é necessário definir um parâmetro que estabelece uma distinção das dimensões envolvendo as três dimensões principais e também o Coeficiente de *Poisson* (ν). O parâmetro utilizado designa-se por coeficiente de *Batdorf* (Z) e calcula-se da seguinte forma:

$$Z = \frac{L^2}{R * t} * \sqrt{1 - \nu} \quad (1)$$

2.1. Modo de Instabilidade *concertina*

Em cilindros não reforçados de espessura reduzida o modo principal de instabilidade *concertina* dá-se quando $Z \leq 2.85$. Este modo de instabilidade tem por base deslocamentos axissimétricos ao longo do comprimento do cilindro.

O valor crítico da força de compressão e a respectiva tensão crítica podem ser obtidas através do método de energia de deformação. Enquanto o cilindro mantiver as suas formas iniciais a energia de deformação é igual à energia exercida pela compressão axial. No entanto, quando se observa uma certa deformação no cilindro a energia de deformação passa a incluir não só a energia procedente da compressão axial mas também a energia devida à deformação média da parede do cilindro na direção circunferencial. Logo verifica-se um aumento da energia de deformação do cilindro. Quando se atinge o valor crítico da força de compressão o aumento de energia originado tem igualar o trabalho realizado pela força compressiva.

Assumindo que a deformação axisimétrica radial respeita a seguinte expressão

$$w = -A_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (2)$$

em m é o número de meias ondas ao longo do comprimento do cilindro.

As extensões ε_1 e ε_2 respectivamente no sentido axial e no sentido radial, vão ser determinadas tendo como condição que a força axial de compressão se mantém constante no decorrer da deformação do cilindro.

Utilizando a notação para extensão axial antes da deformação

$$\varepsilon_0 = -\frac{N_{CR}}{E * t} \quad (3)$$

em que N_{CR} é o valor da força compressiva por unidade de comprimento aplicada no cilindro, E o módulo de elasticidade do material e t a espessura do cilindro obtém-se que

$$\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 = (1 - \nu^2) \varepsilon_0 \quad (4)$$

Tendo em conta que

$$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_0 - \frac{w}{R} = -\nu\varepsilon_0 + \frac{A_m}{R} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (5)$$

obtemos a seguinte expressão

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \nu \frac{A_m}{R} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (6)$$

A variação de curvatura do cilindro na direcção axial é dada por

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = A_m \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (7)$$

A energia de deformação de uma dada casca é determinada a partir da energia de deformação devido à flexão U_1 e da energia de deformação devido ao alongamento da plano médio U_2 através das seguintes expressões

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint [(\chi_x + \chi_y)^2 - 2(1-\nu)(\chi_x \chi_y - \chi_{xy}^2)] dA \quad (8)$$

em que

$$\begin{aligned} \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ D &= \frac{E * t^3}{12 (1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (9)$$

e pela expressão

$$U_2 = \frac{E * t}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} \gamma^2 \right) \right] dA \quad (10)$$

Substituindo as expressões (5), (6) e (7) nas equações (8) e (10) e tendo em atenção que devido à simetria da deformação

$$\gamma = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (11)$$

tem-se que o aumento da energia de deformação ΔU é dado pela seguinte expressão

$$\Delta U = -2\pi E \nu \varepsilon_0 \int_0^L A_m \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \frac{\pi A^2 E t L}{2R} + \frac{A^2 \pi^5 m^4 R D}{2L^3} \quad (12)$$

O trabalho exercido pelas força de compressão ΔT é dado pela equação

$$\Delta T = 2\pi N_{CR} \left[\nu \int_0^L A_m \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \frac{R}{4} A^2 \frac{m^2 \pi^2}{L} \right] \quad (13)$$

Relacionando as equações (12) e (13) obtemos a seguinte expressão para a tensão crítica

$$\sigma_{CR} = \frac{N_{CR}}{t} = D \left(\frac{m^2 \pi^2}{tL^2} + \frac{E}{R^2 D} \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \right) \quad (14)$$

Diferenciando a equação (14) obtém-se a tensão crítica mínima

$$\sigma_{CR \min} = \frac{E * t}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (15)$$

que ocorre quando

$$\frac{m\pi}{L} = \sqrt[4]{\frac{E * t}{R^2 D}} \quad (16)$$

Deste modo o comprimento de meia-onda no qual o cilindro instabiliza e se $\nu = 0.3$ é dado pela seguinte expressão

$$\frac{L}{m} \approx 1.72 \sqrt{R * t} \quad (17)$$

Pode-se deprender da expressão que a tensão crítica não depende do comprimento do cilindro.

2.2. Modo de instabilidade *xadrez*

Em cilindros não reforçados de espessura fina o modo principal de instabilidade *xadrez* dá-se quando $2.85 \leq Z \leq 100$.

Quando se prossegue com o carregamento após o cilindro se encontrar no modo de instabilidade *xadrez*, ele encontra outra forma de instabilidade associada a uma energia de equilíbrio menor que se designa por modo de instabilidade *diamante*. De seguida apresenta-se uma figura esquemática representativa do modo de instabilidade *diamante*.

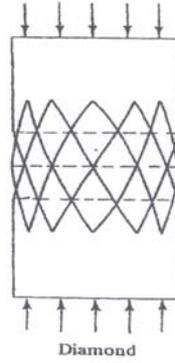


Fig. 2 Modo de instabilidade *diamante*.

A deformação no tipo de modo de instabilidade de *xadrez* é mais complexa do que a modo de instabilidade de *concertina*. Neste caso não se trata de deslocamentos axi-simétricos radiais, ou seja, neste caso os deslocamentos não sendo axi-simétricos vão criar uma ondulação radial para além da ondulação ao longo do comprimento do cilindro anteriormente observada.

Sendo assim, assume-se a seguinte função, como sendo representativa da deformação correspondente ao modo de instabilidade *xadrez*

$$w = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot \sin \frac{ny}{R} \quad (18)$$

em que m é o número de meias ondas ao longo do comprimento do cilindro e n é o número de ondas completas ao longo do perímetro radial do cilindro.

Aplicando o método de energia anteriormente utilizado mas desta vez incluindo também a curvatura radial descrita na equação (18), obtém-se como anteriormente foi descrito uma expressão que nos fornece a tensão crítica

$$\sigma_{CR} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{R} \right)^2 \left[\left(\frac{n^2 + m^2 \lambda^2}{m\lambda} \right)^2 + 12(1-\nu^2) \left(\frac{R}{t} \right)^2 \left(\frac{m\lambda}{n^2 + m^2 \lambda^2} \right)^2 \right] \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{\pi^* R}{L}$$

Trabalhando um pouco a equação (19) pode-se apresentá-la da seguinte forma

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{L} \right)^2 \cdot K_c \quad (20)$$

$$K_c = \gamma_{mn} + \frac{12Z^2}{\pi^4 \gamma_{mn}}$$

$$\gamma_{mn} = \left(\frac{n^2 + m^2 \lambda^2}{m \lambda^2} \right)^2$$

Assumindo γ_{mn} como uma função contínua, pode-se diferenciar o coeficiente Kc e desta forma estabelecer um valor mínimo para a equação (20). Desta forma tem-se que

$$\sigma_{CR \min} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \left(\frac{t}{R} \right) \quad (21)$$

Como se pode observar a equação (21) que nos fornece a tensão crítica mínima para o modo de instabilidade *xadrez* é exactamente a mesma que para o modo de instabilidade *concertina* para cilindros curtos (15).

Tendo em conta o valor de γ_{mn} para o qual a tensão crítica é mínima pode-se proceder à caracterização do número de ondas circunferenciais n para essa mesma tensão.

$$\gamma_{mn} = \left(\frac{n^2 + m^2 \lambda^2}{m \lambda^2} \right)^2 = \frac{\sqrt{12}}{\pi^2} Z \quad (22)$$

desenvolvendo a equação obtém-se que

$$\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt[4]{12} \sqrt{Z}}{\pi} - m \right) \cdot m \quad (23)$$

Como n tem que ter valores inteiros positivos, tem-se que

$$\left(\frac{\sqrt[4]{12} \sqrt{Z}}{\pi} - m \right) > 0 \Rightarrow Z > \frac{m^2 \pi^2}{\sqrt{12}} \quad (24)$$

logo se $m = 1$ tem-se que $Z > 2.85$.

3. MODELOS

Modelaram-se cinco tubos variando o coeficiente de *Batdorf*, de modo a estabelecer uma gama de resultados que descreva os principais modos de instabilidade e também os pontos intermédios desses mesmos modos.

A característica que se decidiu variar de modo a variar o coeficiente de *Batdorf* foi o comprimento dos encanamentos, mantendo a espessura e o raio.

Modelos Cilindricos

	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]
Pipe1	2	10	250	72.39768
Pipe2	2.85	10	250	86.42355
Pipe3	50	10	250	361.9884
Pipe4	100	10	250	511.9289
Pipe5	150	10	250	626.9823

Tabela 1 Dimensões dos modelos

4. ANÁLISE ANALÍTICA LINEAR

O cálculo analítico dos diferentes modelos foi executado tendo em conta o parâmetro de *Batdorf*.

	Propriedades dos cilindros				Tensão Crítica	Modos de Instabilidade	
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	σ_{cr} [N.mm ⁻²]	m	n
Pipe1	2	10	250	72.40	5148.13	1	0
Pipe2	2.85	10	250	86.42	4841.82	1	0
Pipe3	50	10	250	361.99	4842.12	4	2
Pipe4	100	10	250	511.93	4847.59	6	1
Pipe5	150	10	250	626.98	4843.94	7	2

Tabela 2 Resultados da análise analítica

Para o modo de instabilidade *concertina*, no qual se engloba os modelos *pipe1* e *pipe2*, a variação do parâmetro m mostrou que o modo de instabilidade associado à tensão crítica mais baixa é quando $m = 1$. O aumento do parâmetro m , neste caso, leva a um consequente aumento da tensão de crítica do cilindro.

No modelo *pipe2*, o cálculo da tensão crítica através da equação (20) associada ao modo de instabilidade *xadrez* mostrou que o modo de instabilidade para qual se obtém a tensão crítica mais baixa é o modo $m = 1, n = 0$. O cálculo efectuado através da equação (14) associada ao modo de instabilidade *concertina* revelou os mesmos valores, tanto para a tensão crítica como para os parâmetros m e n .

Os valores apresentados para a tensão crítica nos modelos *pipe3*, *pipe4* e *pipe5*, foram os mínimos, no entanto existem modos de instabilidade diferentes com valores de tensão crítica muito semelhantes.

5. ANÁLISE LINEAR POR ELEMENTOS FINITOS

Todos os modelos construídos possuem as mesmas características, à excepção do seu comprimento e também do número de elementos.

Figure 63.1. SHELL63 Elastic Shell

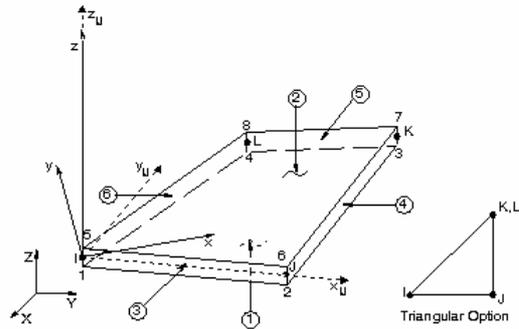


Figura 3 Elemento *shell63*

A escolha do elemento foi feita através da consulta da base de dados existente no programa computacional utilizado, Ansys [4]. A escolha recaiu no elemento *shell63*.

O comportamento do material foi definido como sendo linear elástico e isotrópico.

A escolha da malha foi definida consoante o modelo que estava a ser analisado. Desta forma a malha foi-se apertando até ser atingido um resultado satisfatório.

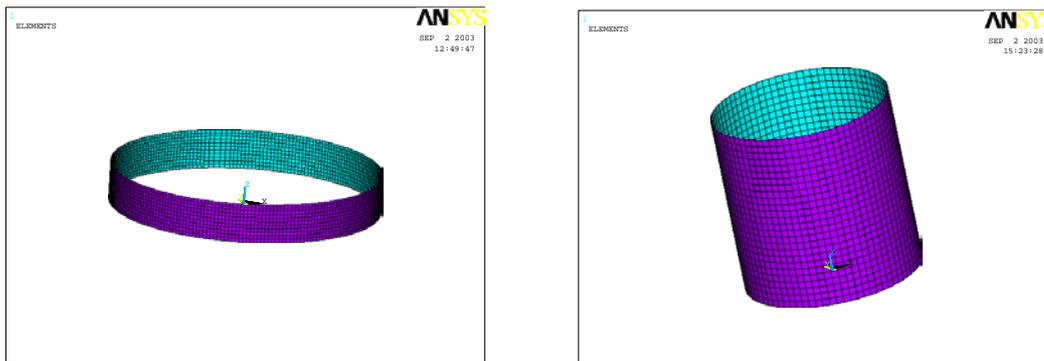


Figura 4 Modelos *pipel* e *pipe4*

As condições fronteiras utilizadas na análise foram definidas de modo a permitir a rotação em relação aos três eixos nas extremidades dos cilindros e a restringir as translações nos três eixos também nas extremidades dos modelos, à exceção da translação no eixo dos z_z na extremidade onde foi aplicada o carregamento.

O carregamento imposto foi uma pressão, ou seja, uma força por unidade de comprimento numa das arestas do modelo.

Os resultados obtidos na análise linear por elementos finitos dos modos de instabilidade para cada um dos modelos apresentam-se na Tabela 3.

Propriedades dos encanamentos					Análise por EF		
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	σ_{cr} [N.mm ⁻²]	m	n
Pipe1	2	10	250	72,40	5055,51	1	0
Pipe2	2,85	10	250	86,42	4759,29	1	2
Pipe3	50	10	250	361,99	4712,55	3	4
Pipe4	100	10	250	511,93	4642,04	2	4
Pipe5	150	10	250	626,98	4580,41	2	4

Tabela 3 Resultados da análise por EF

Os resultados dos modo de instabilidade estão associado à menor pressão crítica. No entanto ao fazer-se a análise foram pedidos pelo utilizador vários modos de instabilidade associados às pressões críticas mais baixas. Os modos de instabilidade tinham pressões críticas muito semelhantes, distando menos de 0.5% entre duas consecutivas.

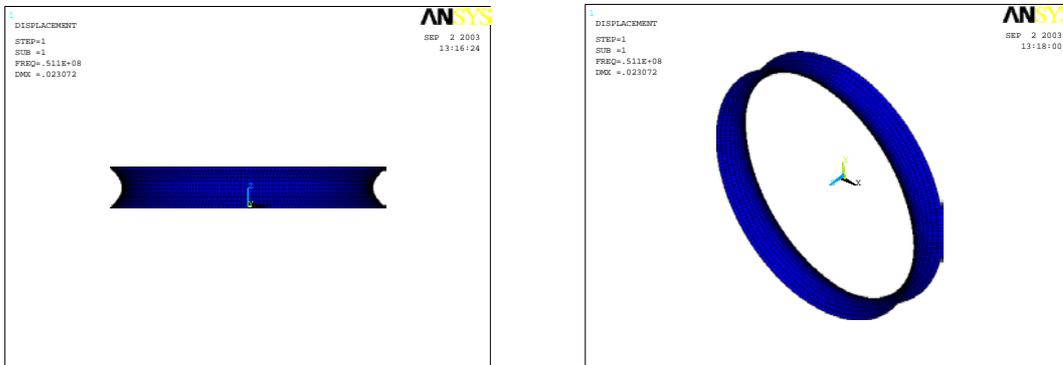


Figura 5 Modo de instabilidade do modelo *pipe1*

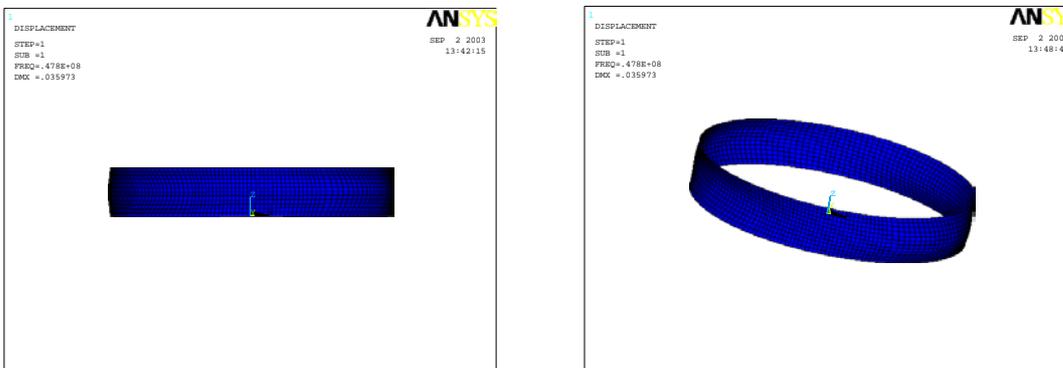


Figura 6 Modo de instabilidade do modelo *pipe2*

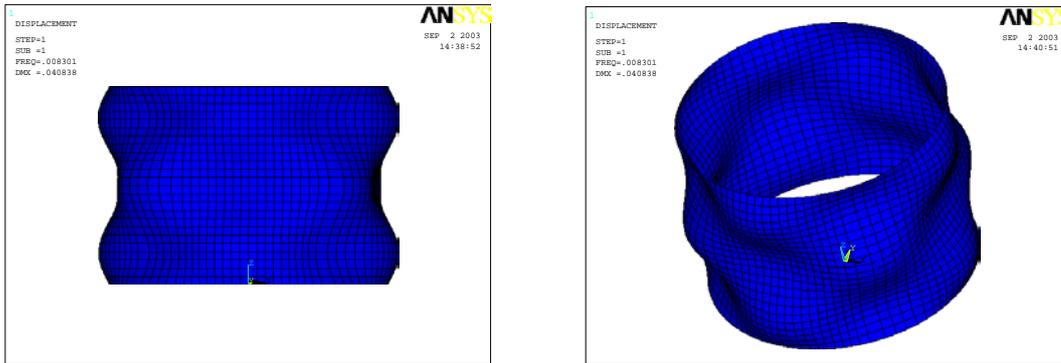


Figura 7 Modo de instabilidade do modelo *pipe3*

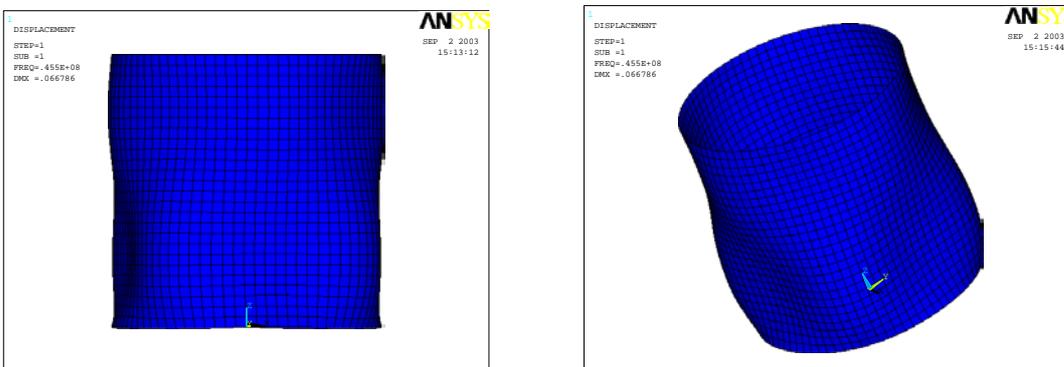


Figura 8 Modo de instabilidade do modelo *pipe4*



Figura 9 Modo de instabilidade do modelo *pipe5*

O modo de instabilidade do modelo *pipe1* pode incluir-se no modo de instabilidade *concertina* associado a parâmetros de *Batdorf* na gama $Z < 2.85$.

O modo de instabilidade do modelo *pipe2* também se pode considerar previsível. Devido a encontrar-se no ponto de viragem entre o modo de instabilidade *concertina* e *xadrez* ($Z = 2.58$) apresentou um modo de instabilidade que se pode considerar como um modo de instabilidade influenciado por ambos.

O modo de instabilidade do modelo *pipe3* ($Z = 50$) encontra-se sem dúvida na gama caracterizada pelo modo de instabilidade *xadrez* ($2.85 < Z < 100$).

Os modo de instabilidade apresentados pelos modelos *pipe4* e *pipe5* são idênticos. Encontrando-se no intervalo entre o modo de instabilidade *xadrez* e coluna ($Z > 100$). O ponto de separação entre estes dois modos de instabilidade não é muito claro, havendo muita interferência de ambos para estes valores do parâmetro de *Batdorf*.

6. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Para uma melhor percepção dos resultados obtidos procedeu-se a uma comparação dos resultados.

A primeira comparação que se estabeleceu foi a das tensões críticas obtidas.

	Propriedades dos tubos				Analítico	EF	Erro relativo
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	σ_{cr} [N.mm ⁻²]	σ_{cr} [N.mm ⁻²]	[%]
Pipe1	2	10	250	72,40	5148,13	5055,51	1,80
Pipe2	2,85	10	250	86,42	4841,82	4759,29	1,70
Pipe3	50	10	250	361,99	4842,12	4712,55	2,68
Pipe4	100	10	250	511,93	4847,59	4642,04	4,24
Pipe5	150	10	250	626,98	4843,94	4580,41	5,44

Tabela 4 Resultados das tensões da análise analítica e por EF

As tensões críticas obtidas são muito idênticas, sendo o erro relativo máximo de 5.44%. O erro relativo aumenta para cilindros de comprimento axial superior.

Vale a pena lembrar que os modos de instabilidade associados à menor tensão crítica são diferentes para as duas análises. Isto é, ao compararmos estas tensões não estamos a comparar modos de instabilidade semelhantes.

	Propriedades dos tubos				Config. EF		Config. Analítica	
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	m	n	m	n
Pipe1	2	10	250	72.40	1	0	1	0
Pipe2	2.85	10	250	86.42	1	2	1	0
Pipe3	50	10	250	361.99	3	4	4	2
Pipe4	100	10	250	511.93	2	4	6	1
Pipe5	150	10	250	626.98	2	4	7	2

Tabela 5 Resultados das configurações da análise analítica e por EF

Os modos de instabilidade obtidos através do cálculo analítico não são totalmente coerentes com as previsões teóricas em relação aos dois modos principais de instabilidade, *concertina* e *xadrez*.

Achou-se também pertinente avaliar o valor das tensões críticas associadas às configurações obtidas pela análise analítica mas calculadas através da análise por elementos finitos.

	Propriedades dos tubos				Configuração analítica		
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	Análise Analítica σ_{cr} [N.mm ⁻²]	Análise EF σ_{cr} [N.mm ⁻²]	Erro relativo [%]
Pipe1	2	10	250	72,40	5148,13	5055,51	1,80
Pipe2	2,85	10	250	86,42	4841,82	4863,36	0,44
Pipe3	50	10	250	361,99	4842,12	4843,59	0,03
Pipe4	100	10	250	511,93	4847,59	4925,63	1,61
Pipe5	150	10	250	626,98	4843,94	4846,49	0,05

Tabela 6 Comparação das tensões associadas à configuração obtida pela análise analítica

Os valores da tensão crítica das configurações calculadas através da análise analítica têm valores muito idênticos nas duas análises. O erro relativo máximo é de 1.80%.

Realizou-se também a comparação as tensões críticas das configurações obtidas através da análise por elementos finitos mas calculadas através da análise analítica.

	Propriedades dos tubos				Configuração EF		
	Z (Batdorf)	t [mm]	R [mm]	L [mm]	Análise EF σ_{cr} [N.mm ⁻²]	Análise Analítica σ_{cr} [N.mm ⁻²]	Erro relativo [%]
Pipe1	2	10	250	72,40	5055,51	5148,13	1,83
Pipe2	2,85	10	250	86,42	4759,29	4863,36	2,19
Pipe3	50	10	250	361,99	4712,55	4843,59	2,78
Pipe4	100	10	250	511,93	4642,04	4925,63	6,11
Pipe5	150	10	250	626,98	4580,41	4846,49	5,81

Tabela 7 Comparação das tensões associadas à configuração obtida pela análise por EF

A tensão crítica para os diversos modelos é muito semelhante sendo o erro relativo máximo de 5.81%. Estes resultados mostram que o cálculo da tensão crítica para os diversos modelos a partir da análise de elementos finitos deu resultados bastante aceitáveis.

7. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos através da análise analítica para os modelos *pipe1*, *pipe2* e *pipe3*, foram os previstos pela teoria. No entanto os modelos *pipe4* e *pipe5* apresentaram configurações características do modo de instabilidade *concertina*, o que não era esperado.

Este facto pode dever-se aos modelos apresentarem valores do parâmetro de *Batdorf* muito elevados.

A transição do modo de instabilidade *concertina* para o modo de instabilidade *xadrez*, ou seja quando $Z = 2.85$, é bastante claro não envolvendo interações de maior entre os dois modos de instabilidade. Quando se passa para valores do parâmetro de *Batdorf* elevados a transição entre diferentes modos de instabilidade não é tão marcada. A transição do modo de instabilidade *xadrez* para o modo de instabilidade de coluna em algumas referências é apontado para $Z = 100$, mas nem sempre isso acontece.

Os resultados obtidos através da análise por EF revelaram-se coerentes com a teoria inicialmente apresentada.

A diferença de configurações dos modos de instabilidade obtidos pelas duas análises podem dever-se ao facto da análise de colapso ser um assunto extremamente complexo de tratar analiticamente, devido essencialmente à enorme influência das imperfeições locais do material.

Os valores da tensão crítica obtidos nas diferentes análises foram muito semelhantes.

8. REFERÊNCIAS

- [1] Faulkner, D., “Analysis and Design of Unstiffened and Stiffened Cylinders”, apontamentos do seminário ministrado no IST em Setembro de 2002.
- [2] Timoshenko, S., Gere, J., “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill Internacional Editions, Second Edition, 1986.
- [3] Beer, F., Johnston Jr., Russel E., “Mechanics of Materials”, MacGraw-Hill Engineering Series, Second Edition.
- [4] Ansys Documentation, Version 7.0, “Help Navigator”.